SEQUENCE 08 – Triangles rectangles

1) Carré d'un nombre

Définition :

Le carré d'un nombre positif a est égal au produit du nombre a par lui-même.

On note $a^2 = a \times a$, et on prononce " a au carré".

2) Racine carrée d'un nombre

Définition :

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a.

Ce nombre est noté $\sqrt{a}$, et on prononce "racine carrée de a ".

__Exemples :__

- $3^2 = 3 \times 3 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$;
- $5^2 = 5 \times 5 = 25$ donc $\sqrt{25} = 5$;
- $7^2 = 7 \times 7 = 49$ donc $\sqrt{49} = 7$;
- $11^2 = 11 \times 11 = 121$ donc $\sqrt{121} = 11$.

Remarque :

Pour déterminer la racine carrée d'un nombre positif à la calculatrice, on utilise la fonction  en effectuant l'enchaînement

$\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{x^2}$.

3) Théorème de Pythagore

Définition :

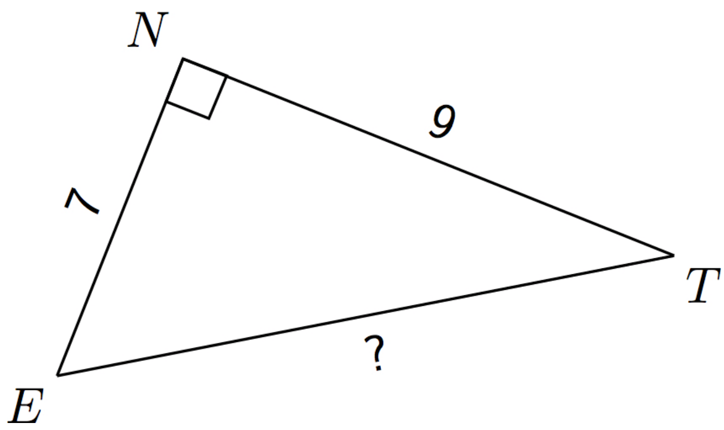
- On dit qu'un triangle est rectangle s'il a un angle droit.
- Dans un triangle rectangle, le côté opposé au sommet de l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est le côté le plus long du triangle.

Théorème 1 :

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés qui forment l'angle droit.

Exemples :

1) On souhaite calculer la longueur ET dans ce triangle :



On sait que le triangle ENT est rectangle en N.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$ET^2 = EN^2 + NT^2$

$ET^2 = 92 + 72$

$ET^2 = 81 + 49$

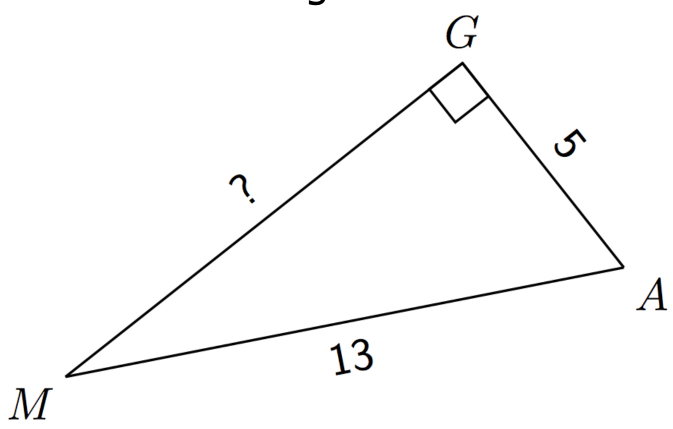
$ET^2 = 130$

En utilisant la fonction $\sqrt{}$ de la calculatrice, on trouve :

$ET=130\approx11{,}4$

Donc la longueur du côté [ET] est 11,4.

2) On souhaite calculer la longueur MG dans ce triangle :



On sait que le triangle MAG est rectangle en G.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$MA^2 = MG^2 + GA^2$

$132 = MG^2 + 52$

$169 = MG^2 + 25$

$MG^2 = 169 - 25$

$MG^2 = 144$

En utilisant la fonction $\sqrt{}$ de la calculatrice, on trouve :

GM=144=12

Donc la longueur du côté [GM] est 12.

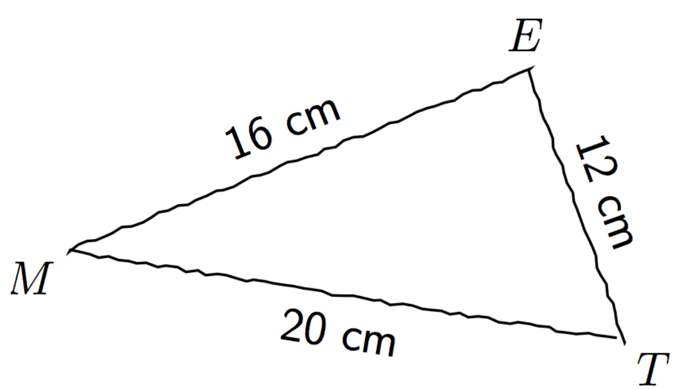
4) Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème 2 : (Réciproque)

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Méthode 1 : Démonter qu'un triangle est rectangle

On souhaite démontrer que le triangle MET ci-dessous est rectangle.



Le côté le plus long est [MT] ;

- D'une part, on a $MT^2 = 20^2 = 400$.
- D'autre part, on a :

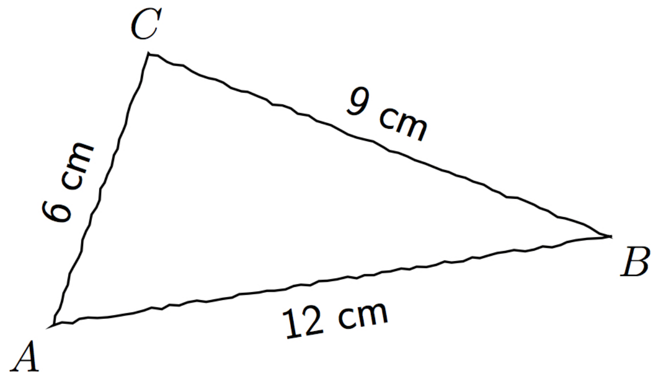
$$EM^2 + ET^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400.$$

Comme $MT^2 = EM^2 + ET^2$ alors d'après le théorème de Pythagore, le triangle MET est rectangle en E.

Remarque :

On dit que le triangle MET vérifie l'égalité de Pythagore.

Méthode 2 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle



On souhaite démontrer que le triangle ABC ci-contre n'est pas rectangle.

Le côté le plus long est [AB].

Si le triangle était rectangle, ce côté serait l'hypoténuse.

- D'une part, on a $AB^2 = 122 = 144$.
- D'autre part, on a $CB^2 + CA^2 = 92 + 62 = 81 + 36 = 117$.

Comme $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$ alors d'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.