SEQUENCE 12 – Calcul littéral

1) Expression littérale

Définition :

Une **expression littérale** est une expression dans laquelle un ou plusieurs nombres sont représentés par des **lettres**.

Exemples :

a) Le **périmètre** d'un losange de côté c est donné par l'expression littérale $4 \times c$ que l'on note plus simplement $4c$.
Si ce losange a un côté mesurant $6\ cm$, alors son périmètre sera de $4 \times 6 = 24\ cm$. On parle alors d'une **expression numérique**.

b) Le **périmètre** d'un rectangle de longueur L et de largeur l est donné par l'une des deux expressions littérales suivantes :

$$2 \times (L + l) \text{ ou } 2 \times L + 2 \times l.$$

Si la longueur de ce rectangle vaut 8 cm, et sa largeur 5 cm, alors son périmètre sera de $2 \times 8 + 2 \times 5 = 16 + 10 = 26\ cm$. (ou $2 \times (8 + 5) = 2 \times 13 = 26\ cm$).

2) Simplifier l'écriture d'une expression littérale

Propriété :

Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le signe "×" :

- devant une lettre.
- devant une parenthèse.

Exemples :

- $2 \times y$ s'écrit $2y$;
- $a \times 3$ s'écrit $3a$;
- $2 \times (x + 1)$ s'écrit $2(x + 1)$;
- $3 \times (5 - a)$ s'écrit $3(5 - a)$;
- 2×5 s'écrit 10, mais pas 25 .

Propriété :

- Le produit $a \times a$ s'écrit a^2, et se prononce "$a\ au\ carré$".
- Le produit $a \times a \times a$ s'écrit a^3, et se prononce "$a\ au\ cube$".

Exemples :

- 3×3 s'écrit $3^2 = 9$;
- $5 \times 5 \times 5$ s'écrit $5^3 = 125$;
- $x \times x$ s'écrit x^2;
- $u \times u \times u$ s'écrit u^3;
- $8 \times 8 \times c \times c \times c$ s'écrit $8^2 \times c^3 = 64c^3$;
- $2 \times y \times 2 \times y \times y$ s'écrit $2^2 \times y^3 = 4y^3$.

3)Tester une égalité

Définition :

Une égalité est composée de deux membres séparés par le symbole =.
Pour que l'égalité soit dite vraie (ou vérifiée), il faut que les deux membres aient la même valeur. Dans le cas contraire, elle est dite fausse.

Exemple :

On souhaite tester si l'égalité $3x - 5 = 9 - x$ est vraie pour $x = 2$ puis pour $x = 3{,}5$.

- Pour $x = 2$:
  - d'une part, le premier membre vaut $3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$;
  - d'autre part, le second membre vaut $9 - 2 = 7$.

Comme les deux membres n'ont pas la même valeur, l'égalité est fausse.

- Pour $x = 3{,}5$:
  - d'une part, le premier membre vaut $3 \times 3{,}5 - 5 = 10{,}5 - 5 = 5{,}5$;
  - d'autre part, le second membre vaut $9 - 3{,}5 = 5{,}5$.

Comme les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie.

4) Développer en simple distributivité

Définition :

Développer un produit signifie l'écrire sous la forme d'une somme ou d'une différence.

Propriété :

Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a :

$$\boldsymbol{k \times (a+b) = k \times a + k \times b}$$

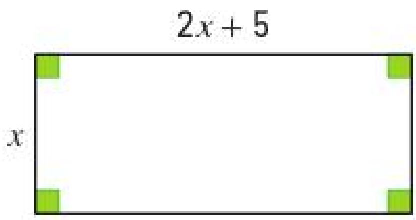
Autrement dit, en simplifiant l'écriture, $k(a+b) = ka + kb$.

Exemples :

- $2 \times (3 + 5x) = 2 \times 3 + 2 \times 5x = 6 + 10x$
- $5y(3 - 2y) = 5y \times 3 - 5y \times 2y = 15y - 10y^2$

Méthode :

On souhaite déterminer l'aire du rectangle ci-contre en fonction de x.



On sait que l'aire d'un rectangle est donnée par la formule suivante :

$$A = L \times l$$

On obtient :

$$A = (2x + 5) \times x = 2x \times x + 5 \times x$$

Ce qui nous donne $A = 2x^2 + 5x$

5) Factoriser

Définition :

Factoriser une somme ou une différence signifie la transformer sous la forme d'un produit.

Remarque :

On peut considérer la factorisation comme le procédé "réciproque" du développement.

$$\text{Produit} \underset{\text{Factoriser}}{\overset{\text{Développer}}{\rightleftarrows}} \text{Somme}$$

Propriété :

Soient k, a et b trois nombres relatifs. On a :

$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

Autrement dit, en simplifiant l'écriture, $ka + kb = k(a + b)$.

Où k est appelé le **facteur commun**.

Exemples :

- $5x + 5y = 5 \times x + 5 \times y = 5 \times (x + y) = 5(x + y)$

  *Le facteur commun est **5**.*

- $3b - 5b = 3 \times b - 5 \times b = (3 - 5) \times b = (-2) \times b = -2b$

- $3x^2 - x = x \times 3x - x \times 1 = x \times (3x - 1) = x(3x - 1)$

Définition :

Réduire une **expression littérale** consiste à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

Méthode :

a) On souhaite réduire l'expression littérale suivante :

$$5x - 2 + 3x + 7$$

On regroupe d'une part les "termes en x", d'autre part les "termes constants".

On obtient :

$$5x - 2 + 3x + 7 = 5x + (-2) + 3x + 7 = 5x + 3x + (-2) + 7 = 8x + 5$$

b) On souhaite réduire l'expression littérale suivante :

$$5x^2 + x - 7x^2 + 5x - 11$$

On regroupe entre eux les "termes en x^2", les "termes en x", et enfin les "termes constants". On obtient :

$$5x^2 + x - 7x^2 + 5x - 11$$

$$= 5x^2 - 7x^2 + x + 5x - 11$$

$$= -2x^2 - 6x - 11$$

Propriété :

a, b et c désignent des nombres quelconques. On a :

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Exemples

Exemple 1

$3-(2x+1)$
$=3-2x-1$
$=-2x+3-1$
$=-2x+2$

Exemple 2

$x-(1-x)$
$=x-1-(-x)$
$=x-1+x$
$=x+x-1$
$=2x-1$

Exemple 3

$x-(-1+x)$
$=x-(-1)-x$
$=x+1-x$
$=1$